

# 低延迟有限冲激响应平坦数字微分器的优化设计

赖春露<sup>1</sup>, 姚统<sup>1</sup>, 王路<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学(威海)信息科学与工程学院, 山东威海 264209; 2. 山东大学(威海)山东大学澳国立联合理学院, 山东威海 264209)

**摘要:** 为满足实际应用对窄带信号高精度微分及微分系统低常延迟的需求, 本文提出平坦低延迟有限冲激响应数字微分器的优化设计算法, 在平坦性和相位误差约束下对最大幅值逼近误差进行最小化. 利用线性方程通解表达式来消除平坦约束, 确保了微分器的平坦度要求. 利用群延迟误差对相位误差重加权, 降低了微分器的通带群延迟误差. 设计例子及与文献方法的比较, 展现了本文方法的有效性和优越性.

**关键词:** 数字微分器; 窄带滤波器; 最大平坦滤波器; 多普勒滤波器; 低时延; 滤波器设计

**中图分类号:** TN79      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2021)03-0477-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.12263/DZXB.20200289

## Optimal Design of Finite Impulse Response Flat Digital Differentiators with Reduced Group Delay

LAI Chun-lu<sup>1</sup>, YAO Tong<sup>1</sup>, WANG Lu<sup>2</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Harbin Institute of Technology (Weihai), Weihai, Shandong 264209, China;

2. SDU-ANU Joint Science College, Shandong University (Weihai), Weihai, Shandong 264209, China)

**Abstract:** To satisfy the requirement on high-precision differentiation of narrow-band signals and low delay of the differentiator, this paper presents a design method for low-delay finite impulse response flat digital differentiators. The method minimizes the maximum magnitude error subject to flatness and phase-error constraints on the differentiator. By eliminating the flatness constraint with the general solution of linear equations, we ensure that the differentiator has desired flatness degrees. By reweighting the phase error with group-delay error, the method reduces the passband group-delay error of the differentiator. Design examples and comparisons with literature methods show the effectiveness and superiority of the proposed method.

**Key words:** digital differentiator; narrow-band filter; maximally flat filter; Doppler filter; low delay; filter design

### 1 引言

数字微分器是用于计算信号微分的一种特殊数字滤波器, 在信号处理、系统控制及通信等领域得到广泛应用<sup>[1-7]</sup>. 传统设计方法之一, 是对全频带上逼近误差的  $L_p$  范数最小化, 进而用数学规划或启发式算法求解. 例如, 在 minimax 相对幅值误差 ( $L_\infty$  范数) 准则下, 线性相位有限冲激响应 (Finite Impulse Response, FIR) 微分器的设计, 可转化为线性规划问题, 并用凸优化软件求解最优微分器. 传统方法得到的数字微分器, 对全带微分很有效. 然而, 这种微分器在整个频带上有一定的幅

值波动, 易给微分信号带来不希望的幅值畸变.

通信与导航等应用中, 需要求导的输入信号可能在一个较窄的频带内<sup>[7]</sup>. 如多普勒雷达中的多普勒跟踪滤波器, 就是对以频谱上不同位置为中心点的窄带信号进行微分; 机载多普勒导航系统, 也是要对某个中心频率周围的信号进行微分; 水下导航及波束形成等应用也有类似要求. 这种情况下, 全频带上最小化相对幅值误差不是一个经济和高效的方法<sup>[7]</sup>.

为此, 人们研究了在某些频率点上与理想滤波器有相同幅值及其各阶导数的数字滤波器, 称之为平坦滤波器<sup>[8-12]</sup>. 这些频率点上的幅值及其导数值约束, 统

称为平坦约束. 最大平坦数字微分器, 就是在某些频率点附近与期望微分器有相同的幅值响应及尽可能高阶的幅值导数, 完全由这些平坦约束确定的数字微分器. 通带上的约束频率称为中心频率, 中心频率附近, 幅值响应非常平坦, 微分精度很高<sup>[12]</sup>.

另外, 精确线性相位 FIR 数字微分器, 虽不产生相位畸变, 但输出信号时延较大, 影响实时应用. 低延迟和近似线性相位数字微分器<sup>[13-17]</sup>, 则能较好满足实时应用和低相位畸变的要求. 低延迟最大平坦滤波器<sup>[12]</sup>, 通过对频率响应及其高阶导数进行约束, 可在中心频率附近获得高度平坦的幅值响应和相位响应. 但在平坦区域之外幅值误差和相位误差快速增大, 导致通带宽度不能满足应用要求.

考虑到高精度微分、大带宽及常延迟等应用要求, 本文研究平坦性约束和相位误差约束下, 数字微分器的最大幅值误差最小化设计. 结合最大平坦微分器与全带微分器设计方法的优势, 克服两者之不足, 在满足幅值响应平坦性及线性相位/常延迟要求的前提下, 使最大幅值误差尽可能小(带宽尽可能大). 通过降低平坦度, 在微分器系数空间释放一定的自由度, 以减小最大幅值误差和通带线性相位偏差, 达到平坦度、最大幅值误差(或带宽)和通带相位线性度的折衷. 论文还通过迭代重加权相位误差方法<sup>[15,18]</sup>, 减小数字微分器的最大群延迟误差, 在通带上实现近似常延迟.

## 2 设计问题的数学描述

设数字微分器的冲激响应为  $\{h_n, n=0, 1, \dots, N-1\}$ , 频率响应为

$$H(e^{j\omega}, \mathbf{h}) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j\omega n} = \boldsymbol{\phi}^T(e^{j\omega}) \mathbf{h} \quad (1)$$

其中上标 T 表示转置,  $\omega$  表示数字角频率,  $j$  为虚数单位,  $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^T$ ,  $\boldsymbol{\phi}(e^{j\omega}) = [1, e^{-j\omega}, \dots, e^{-j(N-1)\omega}]^T$ .

数字微分器的理想频响为  $j\omega$ . 考虑到时延及带宽等因素, 期望频响取为

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} j\omega e^{-j\omega\tau}, & \omega \in \Omega_p \\ 0, & \omega \in \Omega_s \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\tau > 0$  为期望群延迟,  $\Omega_p = [\omega_{p1}, \omega_{p2}]$  为通带 ( $\omega_{p2} < \pi$ ),  $\Omega_s$  为阻带. 当  $\omega_{p1} = 0$  时, 称微分器为低通的; 当  $\omega_{p1} > 0$  时, 称微分器为带通的. 对低通微分器,  $\Omega_s = [\omega_{s2}, \pi]$  或空集, 其中  $\omega_{s2} > \omega_{p2}$ . 对带通微分器,  $\Omega_s = [0, \omega_{s1}]$  或  $[\omega_{s2}, \pi]$  或  $[0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{s2}, \pi]$  或空集, 其中  $\omega_{s1} < \omega_{p1}$ ,  $\omega_{s2} > \omega_{p2}$ .

微分器设计, 是指选择  $\mathbf{h}$  使频响  $H(e^{j\omega}, \mathbf{h})$  逼近  $D(e^{j\omega})$ . 令

$$\bar{D}(\omega) = (j\omega)^{-1} e^{j\omega\tau} D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega \in \Omega_p \\ 0, & \omega \in \Omega_s \end{cases} \quad (3)$$

$$\bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h}) = (j\omega)^{-1} e^{j\omega\tau} H(e^{j\omega}, \mathbf{h}) = \bar{\boldsymbol{\phi}}^T(e^{j\omega}) \mathbf{h} \quad (4)$$

其中  $\bar{\boldsymbol{\phi}}(e^{j\omega}) = (j\omega)^{-1} e^{j\omega\tau} \boldsymbol{\phi}(e^{j\omega})$ , 则问题等价于: 选择  $\mathbf{h}$  使  $\bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h})$  逼近  $\bar{D}(\omega)$ . 逼近误差包括幅值误差  $E_m(\omega, \mathbf{h})$ 、相位误差  $E_p(\omega, \mathbf{h})$  和群延迟误差  $E_g(\omega, \mathbf{h})$ :

$$E_m(\omega, \mathbf{h}) = |H(e^{j\omega}, \mathbf{h})| - |D(e^{j\omega})| \\ = \omega [|\bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h})| - \bar{D}(\omega)] \quad (5)$$

$$E_p(\omega, \mathbf{h}) = \angle H(e^{j\omega}, \mathbf{h}) - \angle D(\omega) = \angle \bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h}) \quad (6)$$

$$E_g(\omega, \mathbf{h}) = \frac{d}{d\omega} E_p(\omega, \mathbf{h}) = \frac{d}{d\omega} \angle \bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h}) \quad (7)$$

为在某些频率点附近得到精确微分, 可在这些频率点上令微分器的频响  $H(e^{j\omega}, \mathbf{h})$  及其各阶导数严格等于  $D(e^{j\omega})$  及其各阶导数, 使  $H(e^{j\omega}, \mathbf{h})$  具有与  $D(e^{j\omega})$  类似的平坦性<sup>[11,16]</sup>. 设平坦约束频率集为  $\bar{\Omega}_l = \{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_L\}$ , 其中  $0 = \bar{\omega}_1 < \bar{\omega}_2 < \dots < \bar{\omega}_L = \pi$ . 频率点  $\bar{\omega}_l$  上的平坦约束为

$$\frac{d^n H(e^{j\bar{\omega}_l}, \mathbf{h})}{d\omega^n} = \frac{d^n D(e^{j\bar{\omega}_l})}{d\omega^n}, \quad n=0, 1, \dots, N_l \quad (8)$$

其中  $N_l \geq -1$  为频率点  $\bar{\omega}_l$  上的平坦度,  $N_l = -1$  表示在  $\bar{\omega}_l$  上无平坦约束.

将式(1)和式(2)代入式(8), 可得平坦约束为:

$$\text{Re} [\boldsymbol{\psi}(n) \circ \boldsymbol{\phi}(\bar{\omega}_l)]^T \mathbf{h} = g_R(\bar{\omega}_l, n) I(\bar{\omega}_l \in \Omega_p) \quad (9)$$

$$\text{Im} [\boldsymbol{\psi}(n) \circ \boldsymbol{\phi}(\bar{\omega}_l)]^T \mathbf{h} = g_I(\bar{\omega}_l, n) I(\bar{\omega}_l \in \Omega_p) \quad (10)$$

其中符号“ $\circ$ ”表示按元素乘运算,

$$\boldsymbol{\psi}(n) = [0^n, 1^n, \dots, (N-1)^n]^T \quad (11)$$

$$g_R(\bar{\omega}_l, n) = \tau^{n-1} [\bar{\omega}_l \tau \sin(\bar{\omega}_l \tau) + n \cos(\bar{\omega}_l \tau)] \quad (12)$$

$$g_I(\bar{\omega}_l, n) = \tau^{n-1} [\bar{\omega}_l \tau \cos(\bar{\omega}_l \tau) - n \sin(\bar{\omega}_l \tau)] \quad (13)$$

$$I(\bar{\omega}_l \in \Omega_p) = \begin{cases} 1, & \bar{\omega}_l \in \Omega_p \\ 0, & \bar{\omega}_l \notin \Omega_p \end{cases} \quad (14)$$

$n=0, 1, \dots, N_l; l=1, \dots, L$ .

需要指出, 当  $\bar{\omega}_l=0$  和  $\pi$  时, 式(10)是个恒等式, 不构成约束. 删除这些恒等式后, 共有  $M$  个等式约束, 其中  $M = (N_1 + 1) + 2(N_2 + 1) + \dots + 2(N_{L-1} + 1) + (N_L + 1) = N_1 + 2(N_2 + \dots + N_{L-1}) + N_L + 2L - 2, 0 \leq M \leq N$ . 把这  $M$  个等式约束合并在一起, 写成  $\mathbf{A}_f \mathbf{h} = \mathbf{b}_f$ , 其中  $\mathbf{A}_f \in \mathbf{R}^{M \times N}$  是行满秩矩阵,  $\mathbf{b}_f \in \mathbf{R}^M$  是向量. 则低延迟平坦 FIR 微分器的设计问题描述为

$$\min_{\mathbf{h}} \max_{\omega \in \Omega_p \cup \Omega_s} W_m(\omega) |E_m(\omega, \mathbf{h})| \quad (15)$$

$$\text{s. t. } W_p(\omega) |E_p(\omega, \mathbf{h})| \leq \gamma_0, \quad \forall \omega \in \Omega_p \quad (16)$$

$$\mathbf{A}_f \mathbf{h} = \mathbf{b}_f \quad (17)$$

其中,  $W_m(\omega) > 0$  和  $W_p(\omega) > 0$  分别是幅值误差和相位误差权函数,  $\gamma_0 > 0$  是加权相位误差的上界. 通常, 通带上取  $W_m(\omega) = |D(e^{j\omega})|^{-1} = 1/\omega$ , 阻带上取  $W_m(\omega) = \text{常值}$ .

称式(15)~(17)描述的设计, 为平坦 FIR 微分器的相位误差约束 minimax 设计. 微分器的平坦度  $N_1, N_2, \dots, N_L$ , 需根据具体应用对微分器长度、微分精度及带

宽等要求进行设置. 对给定长度的微分器, 中心频率点附近微分精度越高, 在该频率点需要越高的平坦度, 但可能导致最大幅值误差越大.

当  $M=N_1+2(N_2+\dots+N_{L-1})+N_L+2L-2=N$  时, 由式(17)可得  $\mathbf{h}=\mathbf{A}_{f_1}\mathbf{b}_f$ . 如果  $\mathbf{h}$  满足式(16), 则它是一个最大平坦数字微分器, 通常带宽较窄(最大幅值误差较大). 若最大幅值误差未达要求, 可降低平坦度  $N_1, N_2, \dots, N_L$  以减小  $M$ , 在满足式(16)的同时获得较小的最大幅值误差. 当平坦度降低到  $N_1=N_2=\dots=N_L=-1$  时, 平坦约束完全消失, 这时设计问题退化为普通的相位误差约束 minimax 问题.

### 3 设计问题的求解算法

结合式(3)和(5), 并注意到通带上  $W_m(\omega)=1/\omega$ , 阻带上  $W_m(\omega)=$  常值  $W_s$ , 式(15)可等价表述为

$$\min_{\delta, \mathbf{h}} \delta \quad (18)$$

$$\text{s. t. } |\bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h})| - 1 \leq \delta, \omega \in \Omega_p \quad (19)$$

$$W_s |H(e^{j\omega}, \mathbf{h})| \leq \delta, \omega \in \Omega_s \quad (20)$$

对给定的  $\delta$ , 任意  $\omega \in \Omega_p$  上的约束式(19)是  $\bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h})$  复平面上中心在原点、外圆和内圆半径为  $1 \pm \delta$  的圆环, 约束域是非凸的. 结合式(16)后, 约束域是非凸的环带扇形. 文献[16]将该环带扇形的内圆弧用其外切线替换, 得到改进的环带扇形, 它是原环带扇形的最大内接凸区域.

令  $\gamma(\omega)=W_p^{-1}(\omega)\gamma_0$ , 并注意式(6), 相位误差约束式(16)可重写为  $|\angle \bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h})| \leq \gamma(\omega)$ . 当  $\gamma(\omega) \leq \pi/2$  时, 等价于  $-\tan\gamma(\omega) \leq \tan \angle \bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h}) \leq \tan\gamma(\omega)$ . 基于此, 并应用文献[16]的改进环带扇形, 问题式(15)~(17)可近似转化为:

$$\min_{\delta, \mathbf{h}} \delta \quad (21)$$

$$\text{s. t. } |\bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h})| \leq 1 + \delta, \omega \in \Omega_p \quad (22)$$

$$|\operatorname{Re}[\bar{H}(e^{j\omega}, \mathbf{h})] - 1| \leq \delta, \omega \in \Omega_p \quad (23)$$

$$W_s |H(e^{j\omega}, \mathbf{h})| \leq \delta, \omega \in \Omega_s \quad (24)$$

$$\operatorname{Im}[e^{-j\gamma(\omega)} \bar{\phi}(e^{j\omega})]^T \mathbf{h} \leq 0, \forall \omega \in \Omega_p \quad (25)$$

$$-\operatorname{Im}[e^{j\gamma(\omega)} \bar{\phi}(e^{j\omega})]^T \mathbf{h} \leq 0, \forall \omega \in \Omega_p \quad (26)$$

$$\mathbf{A}_f \mathbf{h} = \mathbf{b}_f \quad (27)$$

文献[16]应用文献[19]中的 CPCLS-GI 程序直接求解上述问题. 但由于该程序将等式约束式(27)转化为不等式约束, 容易导致数值不稳定及平坦约束不能得到满足. 本文利用式(27)的通解来消除等式约束, 确保微分器的平坦性.

由式(9)、(10)易知, 矩阵  $\mathbf{A}_f$  的任意  $M$  列线性无关. 把  $\mathbf{A}_f$  分解为  $\mathbf{A}_f=[\mathbf{A}_{f_1}, \mathbf{A}_{f_2}]$ , 其中  $\mathbf{A}_{f_1} \in \mathbf{R}^{M \times M}$ , 则  $\mathbf{A}_{f_1}$  可逆. 把  $\mathbf{h}$  相应分解为  $\mathbf{h}=[\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T]^T$ , 其中  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^M, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{N-M}$ , 则由式(27)可得

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_{f_1}^{-1} \mathbf{b}_f - \mathbf{A}_{f_1}^{-1} \mathbf{A}_{f_2} \mathbf{y} \quad (28)$$

从而满足等式约束(27)的通解  $\mathbf{h}$  可表达为

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{F} \mathbf{y} \quad (29)$$

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{f_1}^{-1} \mathbf{b}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{f_1}^{-1} \mathbf{A}_{f_2} \\ \mathbf{E}_{N-M} \end{bmatrix} \quad (30)$$

其中  $\mathbf{E}_{N-M}$  是  $N-M$  阶单位矩阵.

注意到式(4), 并用式(29)消除式(27)的等式约束, 问题式(21)~(27)等价转化为

$$\min_{\delta, \mathbf{y}} \delta \quad (31)$$

$$\text{s. t. } |\bar{\phi}^T(e^{j\omega})(\mathbf{F} \mathbf{y} + \mathbf{h}_0)| \leq 1 + \delta, \omega \in \Omega_p \quad (32)$$

$$|\operatorname{Re}[\bar{\phi}^T(e^{j\omega})(\mathbf{F} \mathbf{y} + \mathbf{h}_0) - 1]| \leq \delta, \omega \in \Omega_p \quad (33)$$

$$W_s |\bar{\phi}^T(e^{j\omega})(\mathbf{F} \mathbf{y} + \mathbf{h}_0)| \leq \delta, \omega \in \Omega_s \quad (34)$$

$$\operatorname{Im}[e^{-j\gamma(\omega)} \bar{\phi}^T(e^{j\omega})](\mathbf{F} \mathbf{y} + \mathbf{h}_0) \leq 0, \forall \omega \in \Omega_p \quad (35)$$

$$-\operatorname{Im}[e^{j\gamma(\omega)} \bar{\phi}^T(e^{j\omega})]^T(\mathbf{F} \mathbf{y} + \mathbf{h}_0) \leq 0, \forall \omega \in \Omega_p \quad (36)$$

对给定的  $\delta$ , 式(32)、(34)都是圆约束, 式(33)等价于两个线性约束, 式(35)、(36)也是线性约束. 因此问题式(31)~(36)是二阶锥规划问题, 可用 CPCLS-GI 程序<sup>[19]</sup>进行求解.

当  $W_p(\omega)=1$  时, 即如文献[16]那样取  $\gamma(\omega)=\gamma_0$ , 求解问题式(21)~(27)得到的相位误差  $E_p(\omega, \mathbf{h})$ , 在通带  $\Omega_p=[\omega_{p1}, \omega_{p2}]$  上除平坦约束频率点附近外是等纹波的. 但带边附近的群延迟误差, 通常要比其它频率点大很多, 导致最大群延迟误差较大.

为此, 本文像文献[15, 18]那样对相位误差  $E_p(\omega, \mathbf{h})$  进行重加权, 即用群延迟误差的修改包络线  $\hat{E}_g(\omega, \mathbf{h}^{(k)})$  按照累乘规则

$$W_p(\omega) = W_p(\omega) \sqrt{\hat{E}_g(\omega, \mathbf{h}^{(k)})} \quad (37)$$

更新  $W_p(\omega)$ , 对相位误差重新加权后再求解问题式(21)~(27). 如此反复迭代, 直至群延迟误差不再变化. 得到的通带群延迟, 除平坦约束频率点附近外, 近似等纹波, 通带最大群延迟误差将比  $W_p(\omega)=1$  时小很多.

根据以上讨论, 本文的低延迟平坦 FIR 数字微分器迭代重加权相位误差约束 minimax 设计算法如下所示.

#### 低延迟平坦 FIR 数字微分器优化设计算法

输入: 微分器阶数  $N$ 、通带  $\Omega_p$ 、阻带  $\Omega_s$ 、平坦约束频率集  $\bar{\Omega}_f = \{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_L\}$ 、平坦度  $N_f = \{N_1, N_2, \dots, N_L\}$ 、期望群延迟  $\tau$ 、相位误差上界  $\gamma_0$ .

输出: 微分器冲激响应向量  $\mathbf{h}$ .

(1) 计算  $M=N_1+2(N_2+\dots+N_{L-1})+N_L+2L-2$ . 按式(9)、(10)计算平坦约束的系数向量及右端常数, 并组成约束系数矩阵  $\mathbf{A}_f$  及右端常数向量  $\mathbf{b}_f$ . 按式(30)计算向量  $\mathbf{h}_0$  及矩阵  $\mathbf{F}$ . 若  $M=N$ , 终止程序, 返回最大平坦微分器  $\mathbf{h}=\mathbf{h}_0$ .

(2) 取初始相位误差权函数  $W_p(\omega)=1$ , 初始迭代次数  $k=1$ .

(3) 令  $\gamma(\omega)=W_p^{-1}(\omega)\gamma_0$ , 计算  $\bar{\phi}(e^{j\omega})$ , 用 CPCLS-GI 程序求解问题式

(31) ~ (36), 其解记为  $y^{(k)}$ . 令  $\mathbf{h}^{(k)} = \mathbf{F}y^{(k)} + \mathbf{h}_0$ .

(4) 计算微分器  $\mathbf{h}^{(k)}$  的群延迟  $g(\omega, \mathbf{h}^{(k)})$  和通带群延迟误差  $E_g(\omega, \mathbf{h}^{(k)})$ . 计算  $|E_g(\omega, \mathbf{h}^{(k)})|$  的修改包络线, 记为  $\hat{E}_g(\omega, \mathbf{h}^{(k)})$ .

(5) 若  $k < k_{\max}$  (预设最大迭代次数), 按式 (37) 更新相位误差权函数  $W_p(\omega)$ , 令  $k = k + 1$ , 返回 (3); 否则, 结束算法, 返回  $\mathbf{h} = \mathbf{h}^{(k)}$ .

## 4 设计例子

本节通过带通和低通微分器的设计例子, 展示本文算法的有效性. 设计时, 将频率区间  $[0, \pi]$  离散化为频率点集  $\{\omega_k = k\pi/1000; k=0, 1, \dots, 1000\}$ .

**例 1** 长度  $N=45$ 、通带  $\Omega_p = [0.6\pi, 0.7\pi]$ 、阻带  $\Omega_s = [0, 0.4\pi] \cup [0.9\pi, \pi]$ 、通带群延迟  $\tau = 20.5$  的平坦带通微分器, 在  $\omega = 0, 0.65\pi$  和  $\pi$  处分别施加  $N_1, N_2$  和  $N_3$  阶平坦约束.

用无重加权的本文算法 ( $k_{\max}=1$ ) 设计了  $N_2=4, N_1=N_3=1, 3, 5, 7$  以及  $N_1=N_3=2, N_2=3, 4, 5, 6$  的 8 个微分器, 通带相位误差上界  $\gamma_0=0.001$ . 通带最大相对幅值误差、阻带最大幅值误差、通带最大相位误差及通带最大群延迟误差列于表 1. 图 1 是其中 4 个微分器的幅频响应曲线、幅值误差曲线、通带相位误差曲线和通带群延迟曲线. 本文的幅值误差, 通带上指相对幅值误差, 阻带上指绝对幅值误差. 可以看到, 在通带中心频率附近一个较宽范围内, 幅值响应曲线是线性的, 幅值误差、相位误差及群延迟等响应曲线是平坦的. 随平坦度增加, 平坦约束频率点附近平坦性增强, 但最大幅值误差增大. 通带较宽时, 平坦性与最大逼近误差是一对矛盾, 即平坦性增强可能导致最大逼近误差增大, 降低平坦度可减小最大逼近误差. 本文正是利用这种关系, 牺牲平坦度来换取通带最大误差的减小.

表 1 例 1 中不同平坦度的 FIR 带通微分器的逼近误差

$N_1, N_2, N_3$	通带最大相对幅值误差	阻带最大幅值误差	通带最大相位误差	通带最大群延迟误差
1, 4, 1	0.0003831	0.0003836	0.001	0.01620
3, 4, 3	0.0007012	0.0007017	0.001	0.01678
5, 4, 5	0.001658	0.001659	0.001	0.01943
7, 4, 7	0.003269	0.003269	0.001	0.02505
2, 3, 2	0.0002733	0.0002733	0.001	0.02203
2, 4, 2	0.0003878	0.0003883	0.001	0.01638
2, 5, 2	0.0004474	0.0004479	0.001	0.04092
2, 6, 2	0.0005380	0.0005384	0.000887	0.03606

还设计了  $\omega = 0.65\pi$  处有 6 阶平坦约束、 $\omega = 0$  和  $\omega = \pi$  处没有平坦约束的带通微分器, 得到的通带最大相对幅值误差、阻带最大幅值误差、通带最大相位误差和最大群延迟误差分别等于  $5.123 \times 10^{-4}$ 、 $5.127 \times 10^{-4}$ 、 $8.644 \times 10^{-4}$  及  $3.508 \times 10^{-2}$ . 文献 [12] 设计了与本例有

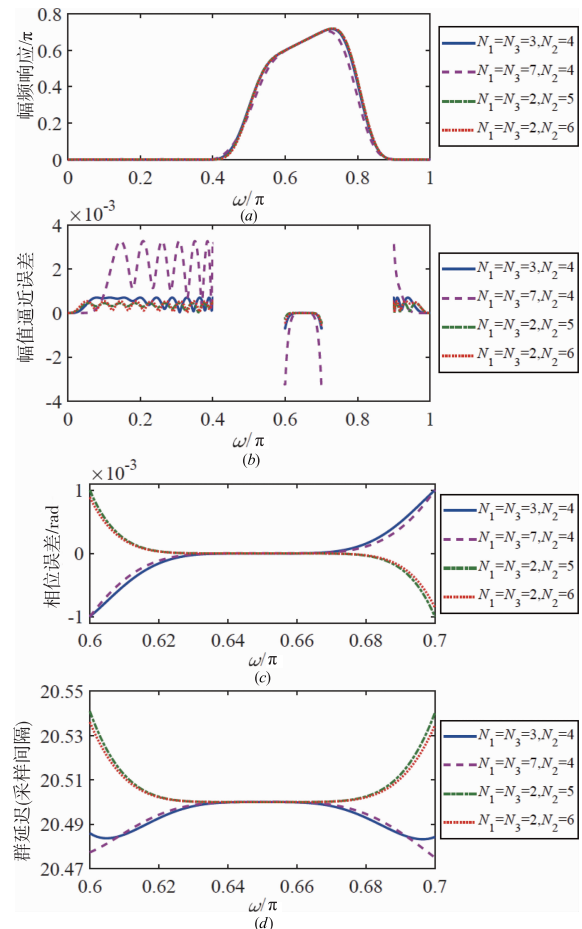


图 1 例 1 带通微分器的幅值响应、幅值误差、通带相位误差及通带群延迟

类似性能要求, 即期望群延迟为 20.5、通带中心频率为  $0.65\pi$  的最大平坦带通微分器, 微分器长度  $N=46$  比本文微分器长度大 1. 图 2 给出了本文结果与文献 [12] 的比较. 从图 2 可看到, 本文算法设计的微分器, 其通带和阻带明显比文献 [12] 的微分器宽, 阻带最大幅值误差和通带  $[0.6\pi, 0.7\pi]$  上的最大群延迟误差也明显比文献 [12] 的微分器小.

需要指出, 文献 [12] 的最大平坦微分器, 阻带是通过在  $\omega = 0$  和  $\omega = \pi$  处施加平坦约束获得的. 本文的微分器, 阻带是显式定义的. 在  $\omega = 0$  和  $\omega = \pi$  处不施加或者施加少量平坦约束, 用释放的自由度换取通带和阻带最大幅值误差的减小, 或者等价地, 换取了通带和阻带宽度的增加.

**例 2** 长度  $N=39$ 、通带  $\Omega_p = [0, 0.6\pi]$ 、阻带  $\Omega_s = [0.8\pi, \pi]$ 、通带群延迟  $\tau = 14$  的平坦低通微分器, 在  $\omega = 0$  处施加  $N_1=3$  阶平坦约束,  $\omega = 0.4\pi$  处施加  $N_2$  阶平坦约束, 通带相位误差上界  $\gamma_0=0.0001$ .

设计了  $N_2$  从 -1 到 8 的 10 个微分器, 其中  $N_2 = -1$  表示在  $\omega = 0.4\pi$  不施加平坦约束. 表 2 列出了本文算法

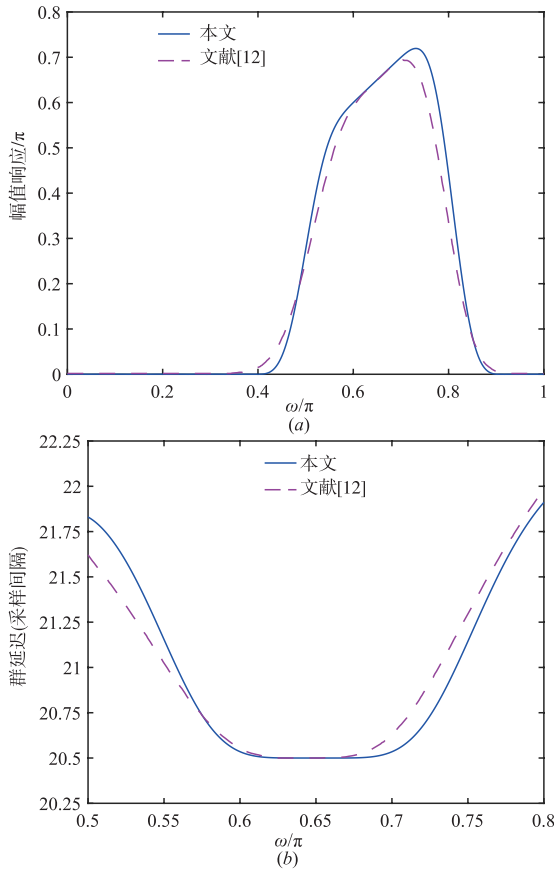


图2 例1带通微分器的幅值和群延迟响应及与文献[12]的比较

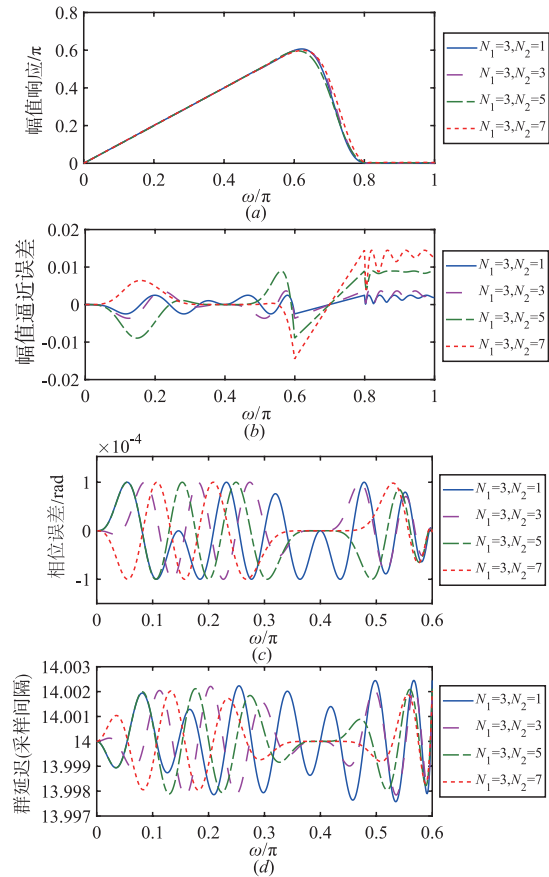


图3 例2微分器的幅频响应、幅值误差及通带相位误差和群延迟响应

表 2 例 2 中不同阶平坦约束 FIR 数字微分器的性能比较

$[N_1, N_2]$	本文算法第 1 次迭代		本文算法第 50 次迭代	
	通带最大相对幅值误差	通带最大群延迟误差	通带最大相对幅值误差	通带最大群延迟误差
[3, -1]	0.001902	0.01877	0.002177	0.003227
[3, 0]	0.002033	0.01880	0.002377	0.002396
[3, 1]	0.002165	0.01870	0.002486	0.002452
[3, 2]	0.002791	0.01859	0.003265	0.002097
[3, 3]	0.003107	0.01873	0.003653	0.002209
[3, 4]	0.004707	0.01858	0.005673	0.002305
[3, 5]	0.007324	0.01755	0.008944	0.002118
[3, 6]	0.008225	0.01802	0.01228	0.002305
[3, 7]	0.01242	0.01581	0.01447	0.002025
[3, 8]	0.01418	0.01527	0.01868	0.001843

第 1 次和第 50 次迭代得到的通带最大相对幅值误差及最大群延迟误差. 通带最大相位误差等于预设值  $\gamma_0 = 0.0001$ , 阻带最大幅值误差与通带最大相对幅值误差相等, 未在表 2 列出. 总体上, 最大幅值误差随  $N_2$  增大而变大, 最大群延迟误差则随  $N_2$  增大略有减小. 究其原因,  $N_2$  增大意味平坦约束增多, 微分器系数的自由度减少, 取值

空间变小, 从而最大幅值误差增大. 但同时,  $N_2$  增大又使通带的平坦度增加, 有可能减小最大群延迟误差.

图 3 给出了  $N_2 = 1, 3, 5, 7$  时, 微分器的幅频响应、幅值误差、通带相位误差及通带群延迟等曲线. 由图可明显看到, 微分器在  $\omega = 0.4\pi$  处的平坦性随  $N_2$  增大而增强; 除平坦约束频率附近区域外, 通带/阻带幅值误差和通带相位误差等波纹, 通带群延迟近似等波纹.

**例 3** 48 阶低通微分器, 通带和阻带以及通带相位误差上界同例 2, 期望通带群延迟  $\tau = 19$ , 在  $\omega = 0, 0.4\pi$  和  $\pi$  处分别施加  $N_1 = 3, N_2 = 4, N_3 = 6$  阶平坦约束. 图 4 示出了所得微分器的幅频响应、幅值误差、相位误差及群延迟等曲线. 幅值误差、相位误差和群延迟, 都在  $\omega = 0$  和  $\omega = 0.4\pi$  附近有很好的平坦性. 幅值误差还在  $\omega = \pi$  附近有很好的平坦性.

为比较, 图 4 还示出了文献 [16] 对该微分器的设计结果. 文献 [16] 和本文设计的微分器平坦性是一样的, 但文献 [16] 设计的微分器, 通带群延迟波动大, 通带边缘的群延迟与期望值 19 的偏差比其它地方大很多, 最大偏差为 0.02092. 本文设计的微分器, 通带最大群延迟误差为 0.002019, 只有文献 [16] 的 1/10. 可见, 本文方法更适合低常延迟微分器的设计. 不过, 本文微

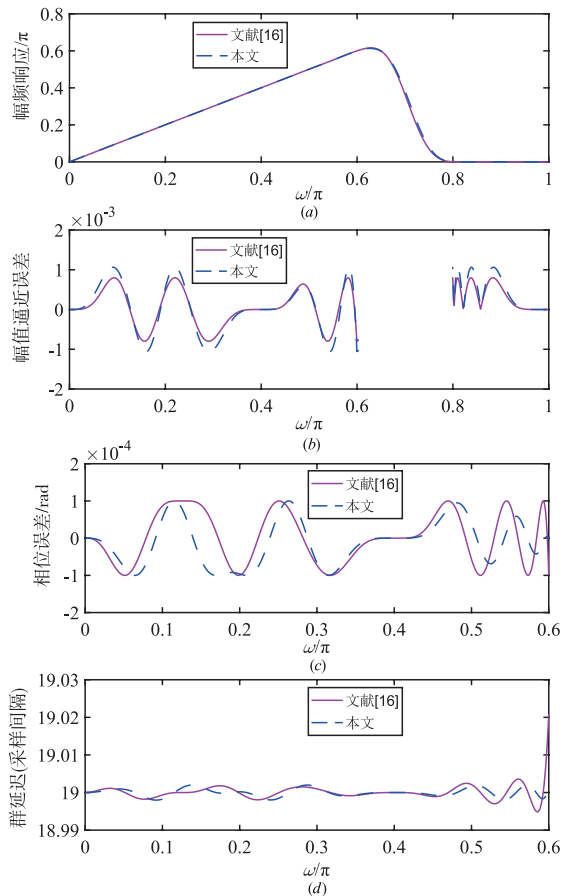


图4 例3微分器及与文献[16]微分器的比较

分器在幅值误差上有所牺牲,比文献[16]大1/4左右,这归因于迭代重加权相位误差机制.文献[16]没有对相位误差重加权,带边群延迟误差很大.本文对相位误差进行了重加权,大幅度减小了最大群延迟误差,但由于带边的相位误差约束变紧,解空间变小,导致幅值误差增加.

## 5 结论

提出的设计方法,不仅能保证数字微分器在指定频率点的平坦性,也能保证通带最大线性相位偏差不超过给定值,还能最小化通带最大相对幅值误差和阻带最大幅值误差,并可通过迭代重加权大幅度减小最大群延迟误差,在微分器的平坦度、通带宽度和相位线性度之间得到了很好的折衷,实用性很强.

## 参考文献

[1] AL-ALAOUI M A. Direct approach to image edge detection using differentiators[A]. Proceedings of the 17th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems[C]. New York: IEEE, 2010. 154 – 157.

[2] 陈青,刘金平,唐朝晖,李建奇,吴敏. 基于分数阶微分的

图像边缘细节检测与提取[J]. 电子学报, 2013, 41(10): 1873 – 1880.

CHEN Q, LIU J P, TANG Z H, LI J Q, WU M. Detection and extraction of image edge curves and detailed features using fractional differentiation[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(10): 1873 – 1880. (in Chinese)

- [3] MARBLE A E, MCLNTYRE C M, HASEINGS-JAMES R, et al. A comparison of algorithms used in computing the derivative of the left ventricular pressure[J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 1981, BME-28(7): 524 – 529.
- [4] 肖振华, 梁意文, 谭成予, 周雯, 刘维伟. 基于数值微分的树突状细胞故障检测方法[J]. 电子学报, 2019, 47(5): 1029 – 1035.
- XIAO Z H, LIANG Y W, TAN C Y, et al. Dendritic cell fault detection method based on numerical differentiation[J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(5): 1029 – 1035. (in Chinese)
- [5] VALIIVITAS, VAINIO O. Delayless differentiation algorithm and its efficient implementation for motion control applications[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1999, 48(5): 967 – 971.
- [6] WAN M, HAN S, ZHANG Z, et al. Digital differentiator-based MSK demodulator in a zero-IF receiver for 2.4GHz Zigbee applications[A]. Proceedings of the 11th International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing[C]. London: IET, 2015. 1 – 8.
- [7] KUMAR B, ROY S C D. On the design of FIR digital differentiators which are maximally linear at the frequency  $\pi/p$ ,  $p \in$  positive integers[J]. IEEE Transactions on Signal Process, 1992, 40(9): 2334 – 2338.
- [8] CARLSSON B. Maximum flat digital differentiator[J]. Electronics Letters, 1991, 27(8): 675 – 677.
- [9] SELESNICK I W, BURRUS C S. Exchange algorithms for the design of linear phase FIR filters and differentiators having flat monotonic passbands and equiripple stopbands[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, 1996, 43(9): 671 – 675.
- [10] KHAN I R, OKUDA M. Finite-impulse-response digital differentiators for midband frequencies based on maximal linearity constrains[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs, 2007, 54(3): 242 – 246.
- [11] ZHANG X. Design of maximally flat IIR filters with flat group delay responses[J]. Signal Processing, 2008, 88(7): 1792 – 1800.
- [12] YOSHIDA T, AIKAWA N. Low-delay band-pass maximally flat FIR digital differentiators[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2018, 37(8): 3576 – 3588.
- [13] SELESNICK I W, BURRUS C S. Maximally flat low-pass

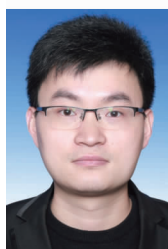
- FIR filters with reduced delay [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, 1998, 45(1): 53 – 68.
- [14] NONGPIUR R C, SHPAK D J, ANTONIOU A. Design of IIR digital differentiators using constrained optimization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(7): 1729 – 1739.
- [15] LAI X P, LIN Z P. Iterative reweighted minimax phase error designs of IIR digital filters with nearly linear phases [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(9): 2416 – 2428.
- [16] YI H P, LAI X P, MENG H L. A modified annulus sector constraint for constrained FIR filter designs [J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2019, 38(11): 5373 – 5392.
- [17] MENG H L, LAI X P, YI H P. A sequential partial optimization algorithm for design of near linear-phase IIR digital differentiators [J]. Chinese Journal of Electronics, 2019, 28(5): 968 – 977.
- [18] 王路, 赖春露. FIR 数字滤波器幅频响应约束最大加权相位误差最小化设计 [J]. 电子学报, 2018, 46(11): 2781 – 2786.  
WANG L, LAI C L. Design of FIR digital filters by a magnitude-response constrained minimax weighted phase error method [J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(11): 2781 – 2786. (in Chinese)
- [19] LAI X P. Optimal design of nonlinear-phase FIR filters with prescribed phase error [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(9): 3399 – 3410.

### 作者简介



**赖春露** 女, 1989 年 4 月生于山东威海. 现为哈尔滨工业大学(威海)信息科学与工程学院工程师. 主要研究方向为信号处理、滤波器设计、数字图像处理.

E-mail: laicl\_ruby@hitwh.edu.cn



**姚统** 男, 1988 年 6 月生于河南郑州. 现为哈尔滨工业大学(威海)信息科学与工程学院工程师. 主要研究方向为智能感知与无人系统、机器人控制、变频驱动技术.

E-mail: yaotong@hit.edu.cn



**王路(通信作者)** 男, 1988 年 9 月生于山东德州. 现为山东大学(威海)山东大学澳国立联合理学院工程师. 主要研究方向为信号处理、滤波器设计、数字图像处理.

E-mail: wanglu@sdu.edu.cn